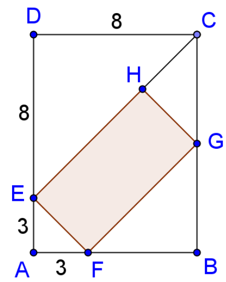
9. Vorarlberger Mathematik – Miniolympiade
(25.5.2011)

Hinweise:	*** Gib auf jedem Blatt deinen Namen und deine Schule an!** *** Löse jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt! (Blattnummer von 1 bis 8)** *** Führe Begründungen, Nebenrechnungen usw. an! Der Lösungsweg muss klar ersichtlich und nachvollziehbar sein.**

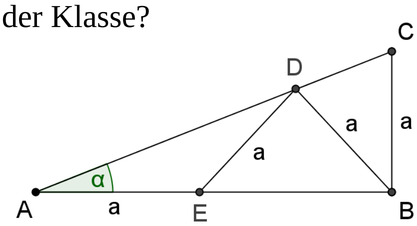
1. Ein großer Würfel mit der Kantenlänge 2011cm ist aus lauter kleinen Würfeln der Kantenlänge 1cm aufgebaut, d.h. er besteht aus $2011 \times 2011 \times 2011$ kleinen Würfeln.
   a) Von wie vielen kleinen Würfeln sind genau zwei Seitenflächen sichtbar?
   b) Von wie vielen kleinen Würfeln ist genau eine Seitenfläche sichtbar?

2. Frische Pilze enthalten 96% Wasser. Ruth hat 1 kg Pilze geerntet, die sie in die Sonne zum Trocknen legt, wodurch ein Teil des Wassers verdunstet. Nach dem Trocknen wiegen die Pilze noch 200g. Wie viel Prozent Wasser enthalten sie jetzt?



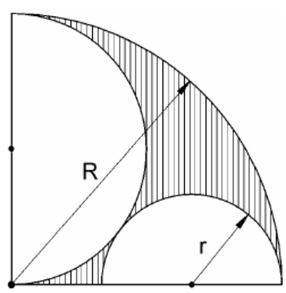
3. In einem Rechteck ABCD liegt ein anderes Rechteck EFGH. Die Lage und die Maße sind in der Abbildung rechts angegeben. Welchen Flächeninhalt hat das schattierte Rechteck EFGH? (Achtung: Die Abbildung ist nicht maßstabsgetreu.)

4. Der Mittelwert der Größen aller Schüler einer Klasse beträgt 170,5cm. Nachdem ein 186cm großer Schüler dieser Klasse ausgetreten ist, beträgt dieser Mittelwert nur mehr 170cm. Wie viele Schüler waren ursprünglich in der Klasse?

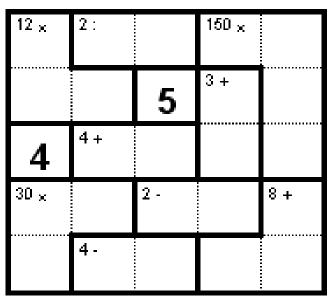


5. Berechne die Größe des Winkels α im rechts abgebildeten rechtwinkligen Dreieck ABC! (Die vier in der Abbildung mit „a“ bezeichneten Strecken sind alle gleich lang. Der rechte Winkel des Dreiecks ABC befindet sich bei B.)

6. Alexander subtrahiert 1 von der Zahl 10^{48} und dividiert das Ergebnis durch 99. Wie viele Nullen hat die Zahl, die er erhält?



7. Die rechts dargestellte Figur ist aus Kreisteilen und Strecken zusammengesetzt.
   a) Beweise (oder begründe), dass R = 3r gilt!
   b) Berechne den Flächeninhalt des schraffierten Flächenstücks und stelle das Ergebnis in Abhängigkeit von r dar!



8. Rechts abgebildet findest du ein „Kendoku“, eine mathematische Variante des bekannten „Sudoku“. Mit diesem Angabeblatt hast du ein Zusatzblatt erhalten, auf dem sich die Regeln, ein Musterbeispiel und das Kendoku, das du lösen sollst, befinden. <u>Löse das Rätsel also auf dem Zusatzblatt und gib dieses als „Aufgabe 8“ am Schluss des Wettbewerbs ab</u>! Dieses Angabeblatt brauchst du nicht abzugeben. Viel Spaß und viel Erfolg!

9. Vorarlberger Mathematik – Miniolympiade

(25.5.2011)

Lösungen:

1. a) Alle kleinen Würfel, die die Kanten des großen Würfels bilden, haben zwei Kanten an der Außenseite des großen Würfels. Ein Würfel besitzt 12 Kanten. Von den kleinen Würfeln, die an den Kanten liegen, sind pro Kante 2009 Würfel sichtbar. Daher sind von 2009 · 12 = **24 108** Würfeln genau zwei Seitenflächen sichtbar.

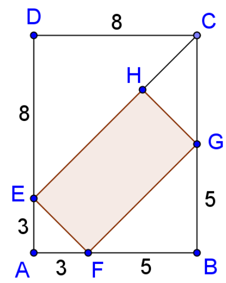
   b) Alle kleinen Würfel, die an der Außenfläche des großen Würfels liegen, ohne einer seiner Kanten anzugehören, besitzen genau eine von außen sichtbare Fläche. Ein Würfel besitzt 6 Begrenzungsflächen. Pro Begrenzungsfläche sind dies 2009 · 2009 Würfel, daher insgesamt 2009 · 2009 · 6 = 4 036 081 · 6 = **24 216 486** Würfel.

2. 1 kg Pilze enthalten 960g Wasser und damit 40g „Trockenmasse", die beim Trocknen unverändert bleibt. Da die Pilze danach 200g wiegen, müssen sie aus 40g Trockenmasse und 160g Wasser bestehen. 160g von 200g sind 80%, daher enthalten die Pilze nach dem Trocknen **80%** Wasser.

3. Die Strecke FB ist 8 – 3 = 5cm lang. Mit dem Satz des Pythagoras lassen sich die Seiten EF und FG bestimmen:

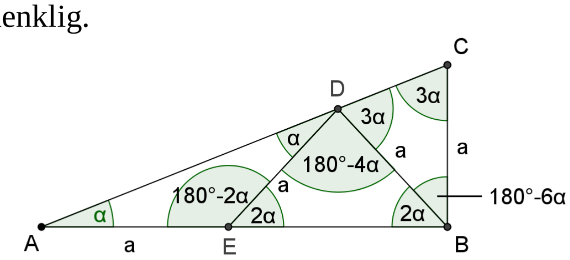
   $\overline{EF} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$ und $\overline{FG} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

   Damit erhält man den Flächeninhalt A = $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{900} =$ **30**



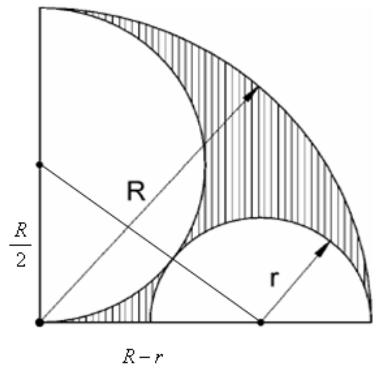
4. Sei x die ursprüngliche Anzahl der Schüler in der Klasse. Dann betrug damals die Gesamtgröße (=Summe aller Körpergrößen) der Schüler 170,5x. Nach dem Austritt eines Schülers betrug sie nur mehr 170,5x – 186. Diese neue Gesamtgröße kann man auch mit 170·(x–1) ausdrücken. Aus der Gleichung 170,5x – 186 = 170·(x–1) folgt schließlich x = 32. Ursprünglich waren also **32** Schüler in der Klasse.

5. Alle eingeschriebenen Dreiecke sind gleichschenklig. Von links (Dreieck AED) bis rechts (Dreieck BCD) lassen sich alle Winkel durch α ausdrücken. Den rechten Winkel im Dreieck ABC kann man somit auch durch 2α + (180° – 6α) beschreiben, sodass aus der Gleichung 2α + (180° – 6α) = 90° der Winkel α = **22,5°** errechnet werden kann.



6. Die Zahl 10^{48} besteht aus einer Eins und 48 Nullen. Subtrahiert man davon 1, so erhält man 999…99, eine Zahl mit 48 Neunern. Beim Durchdividieren von mehrstelligen Zahlen durch 99 wird schnell klar, dass sich im Quotienten die Ziffern 1 und 0 abwechseln. Teilt man die aus den 48 Neunern zusammengesetzte Zahl durch 99, so entsteht die Zahl 10101…0101, die aus insgesamt **23 Nullen** besteht.

7. a) Verbindet man die Mittelpunkte der beiden Halbkreise, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, für das der Satz des Pythagoras gilt:



$$\left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R-r)^2 = \left(\frac{R}{2}+r\right)^2$$

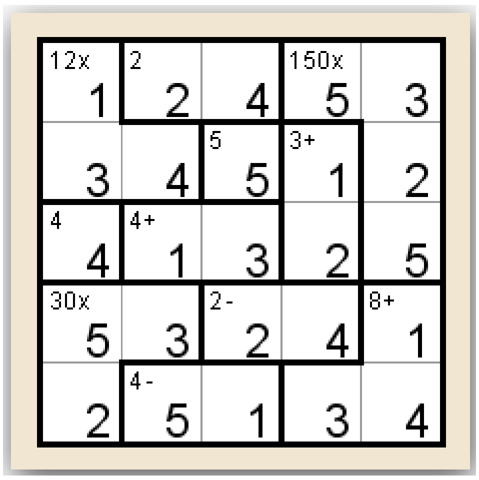
Durch Anwenden der binomischen Formel und Anschließendes Vereinfachen ergibt sich die Behauptung.

b) Die schraffierte Fläche bleibt übrig, wenn vom Inhalt der großen Viertelkreisfläche die Flächeninhalte der beiden Halbkreise subtrahiert werden:

$$A = \frac{1}{4}\cdot R^2\pi \; - \; \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2\pi - \frac{1}{2}\cdot r^2\pi \; = \; \frac{R^2\pi}{8} - \frac{r^2\pi}{2} \; = \; \frac{(3r)^2\pi}{8} - \frac{r^2\pi}{2}$$

Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt: A = $\underline{\boldsymbol{\frac{5}{8}\cdot r^2\pi}}$

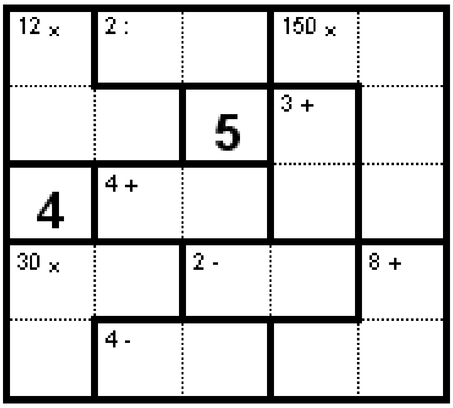
8.



Name: ______________________________

Schule/Klasse: ________________________

<u>Aufgabe 8</u>:



Regeln für das Kendoku-Rätsel:

In die Felder des Diagramms sind die Zahlen von 1 bis 5 einzutragen, wobei – wie in einem normalen Sudoku **-** jede Zahl in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vorkommen muss. Zwei der Zahlen sind bereits eingetragen.

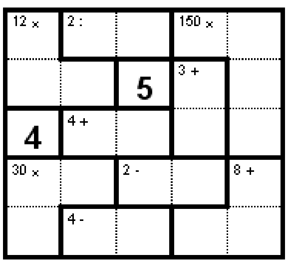
Zusätzlich sind die Felder in Gebiete eingeteilt, für die jeweils eine Zahl und ein Rechenoperations-zeichen („+“, „–“, „×“ bzw. „**:**“) angeführt sind. Die einzelnen Gebiete kannst du an der stärkeren Umrandung der Felder erkennen. Aus den Zahlen, die du in ein solches Gebiet einträgst, muss sich durch die vorgegebene Rechenoperation (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) das vorgegebene Ergebnis berechnen lassen.

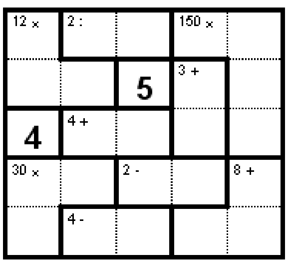
<u>Beispiel</u>: Die Bezeichnung „2 –“ bedeutet, dass die in diesem Gebiet eingetragenen Zahlen beim Subtrahieren das Ergebnis „2“ liefern sollen. (Vorsicht: Beim Subtrahieren und Dividieren muss die zuerst angeführte Zahl nicht unbedingt die größere sein.)

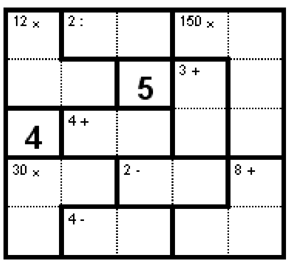
Auf der Rückseite dieses Blattes findest du ein Beispiel für dieses Rätsel mit anderen Zahlenvorgaben.

Die unten angeführten kleineren Raster sind für dich zum Probieren gedacht. **Es gilt aber nur die Version im großen Raster! Trage also dein Endergebnis aber auf jeden Fall in das oben abgedruckte Zahlenraster ein!**

Hier sind einige Vorlagen zum Probieren:







Hier siehst du die Angabe und die zugehörige Lösung eines anderen Kendoku-Rätsels: